Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

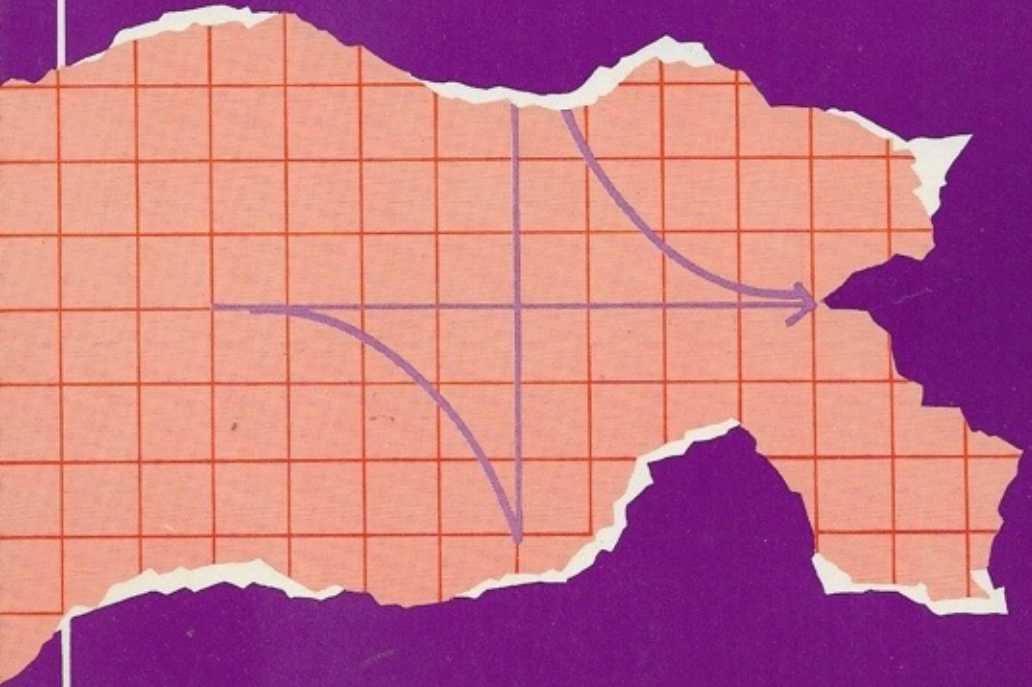
Bloque 6

Geometría analítica

Módulo 5

LA HIPÉRBOLA

Conrado Flores García



trillas

SERIE MÓDULOS DE MATEMÁTICAS

Conrado Flores García

A través del tiempo y en todos los niveles de aprendizaje, los estudiantes han considerado a las matemáticas como un escollo insalvable. Aun cuando se han establecido nuevos enfoques pedagógicos para la enseñanza de esta materia, casi siempre los educandos enfrentan su estudio con verdadero temor, debido al prejuicio generalizado sobre la supuesta dificultad de esta asignatura.

La serie *Módulos de matemáticas*, a la cual pertenece el presente texto, es un valioso auxiliar con el que puede abordarse sencilla y eficazmente el proceso de enseñanza-aprendizaje de este campo de conocimiento.

Es necesario destacar que los *Módulos de matemáticas* constituyen un método de *aprendizaje paso a paso*, ya que la información se presenta por medio de cuadros didácticos (informativos, de preguntas y de respuestas), que están organizados en orden creciente de complejidad. De este modo, se conduce *paso a paso* al lector desde los conceptos más elementales, como los de conjunto y elemento, hasta los más complejos de cálculo integral, pasando por aquéllos del álgebra (estructuras, operaciones y modelos), de la lógica matemática, de la geometría euclidiana, de la trigonometría, de la geometría analítica y del cálculo diferencial.

Mediante este novedoso sistema, más ágil y motivador que el de la enseñanza programada, se facilita tanto la exposición de los temas como la comprensión y asimilación de los mismos.

El autor revisa el panorama matemático fundamental a lo largo de los 64 módulos que, agrupados en 8 bloques, constituyen la serie. Además, cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos denominado *Memo*.

Los profesores de enseñanza secundaria, de preparatoria y de universidad pueden emplear los *Módulos de matemáticas* como parte integrante de sus guiones didácticos y los estudiantes tienen la posibilidad de incorporarse como material complementario y de apoyo a las experiencias adquiridas en el aula. Asimismo, estos libros son útiles para las personas que quieran actualizar o bien repasar, sus conocimientos en esta área o para quienes deseen iniciar un aprendizaje autodidáctico por la imposibilidad de asistir a una institución educativa.

Esperamos que al estudiar los Módulos de matemáticas, los alumnos se den cuenta de que esa fortaleza defendida por ejércitos de números, símbolos y fórmulas, aparentemente inexpugnable, puede ser alcanzada por cualquier persona decidida y tesonera.

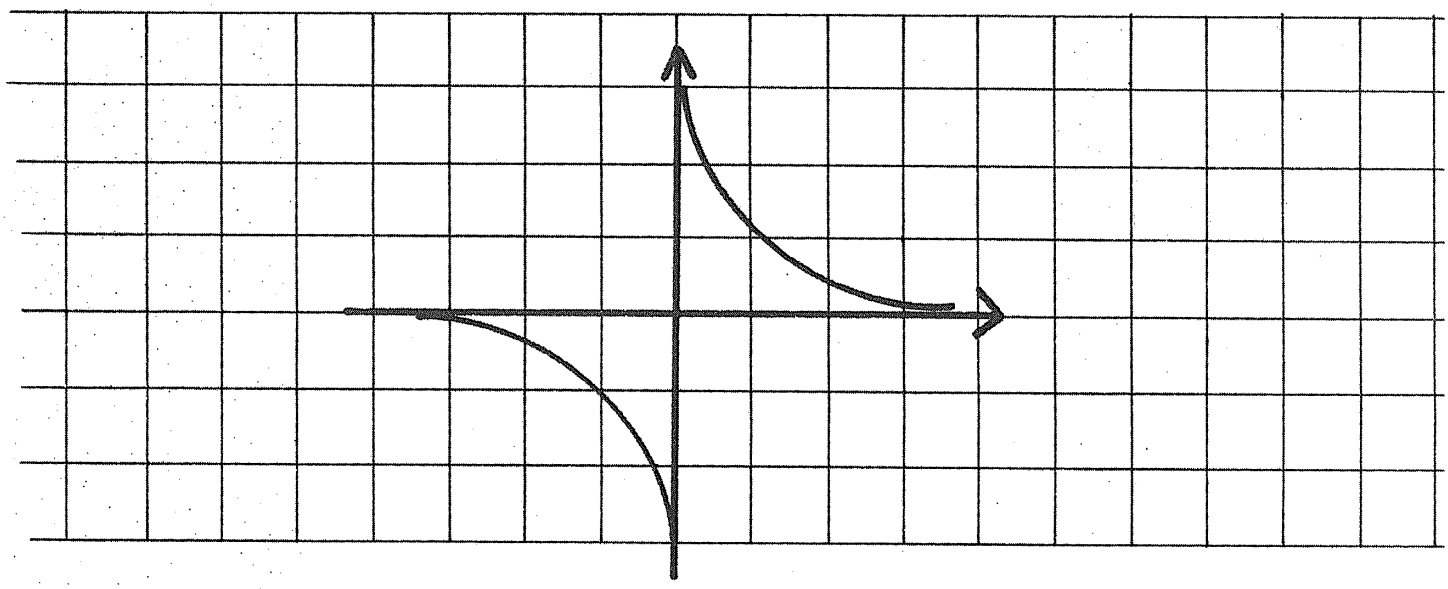
LA HIPÉRBOLA

Obras que integran el bloque 6 *(Geometría analítica):*

1. Introducción a la geometría analítica
2. La recta
3. La circunferencia
4. La elipse
5. ***La hipérbola***
6. La parábola
7. Las cónicas y la ecuación general de segundo grado
8. Relaciones y lugares geométricos.

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 6
Geometría analítica

Módulo 5

LA HIPÉRBOLA

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS
México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

La presentación y disposición en conjunto de
LA HIPÉRBOLA
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, julio 1984
ISBN 968-24-0836-9

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

5.1. Los elementos de una hipérbola 9

5.2 Ecuación ordinaria de una hipérbola (horizontal o vertical) 24

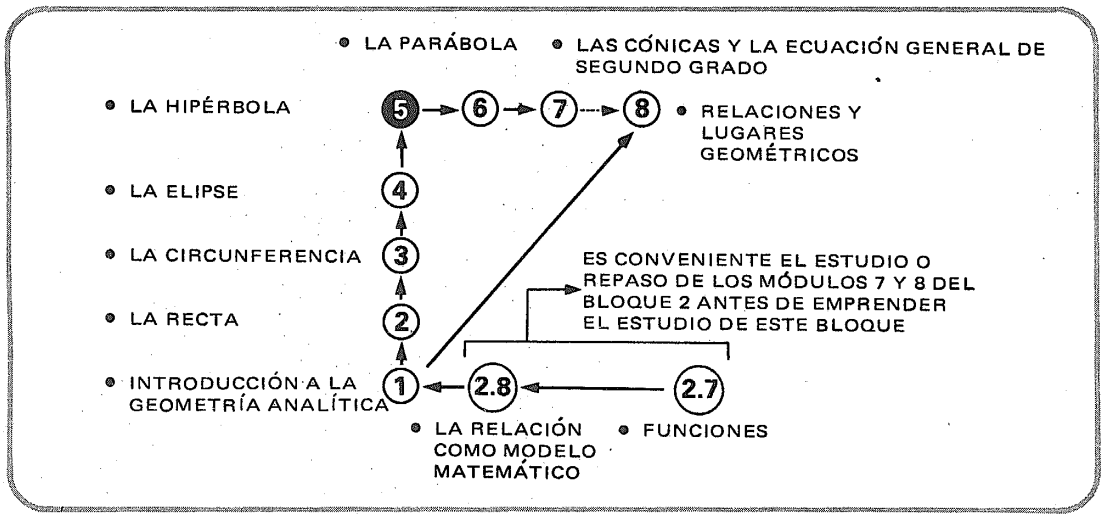
5.3 Ecuación general de una hipérbola con ejes paralelos a los coordenados 44

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 6. Geometría analítica

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico representado por una relación cuya regla de correspondencia es una ecuación lineal, una ecuación cuadrática, o bien, una ecuación, una desigualdad, un sistema de ecuaciones o de desigualdades cualesquiera

Esquema estructural del bloque 6



Módulo 5. La hipérbola

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico llamado hipérbola

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Los números complejos (concepto y manejo)	1	14
• Resolución de ecuaciones de primer y segundo grados	2	2, 5
• Resolución de sistemas de ecuaciones	2	3, 11
• Propiedades geométricas de ángulos, triángulos y demás polígonos convexos	4	1, 2, 3, 4, 5, 6
• Las funciones trigonométricas directas o inversas	5	1, 3, 4, 5
• Algunas identidades trigonométricas	5	6
• La circunferencia y la elipse	6	3, 4

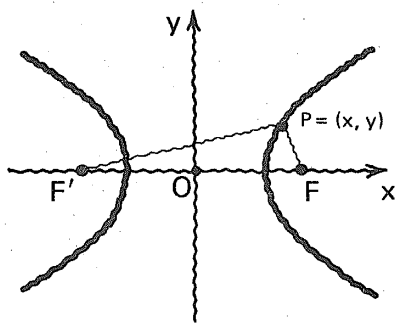
5.1

Los elementos de una hipérbola

1

Hipérbola

es un conjunto
de puntos
en el plano
que satisfacen
la condición
siguiente:



"el valor absoluto de la diferencia de las distancias no dirigidas de un punto cualquiera del conjunto a dos puntos fijos llamados focos es constante".

2

Los puntos F y F'
son los

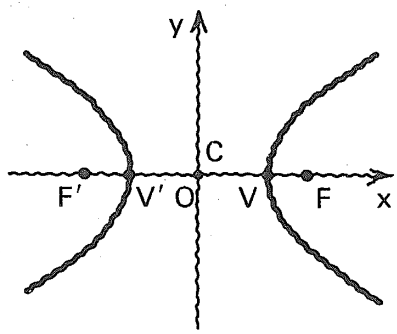
focos;

los puntos V y V'
son los

vértices

de la hipérbola.

El punto C
es el centro de la hipérbola,
que en este caso
coincide con el origen
del sistema cartesiano.



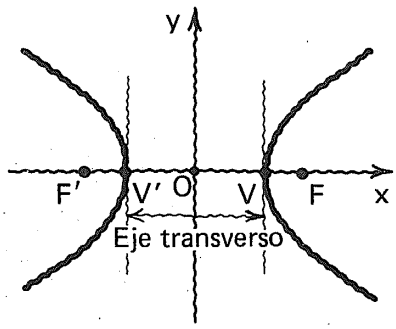
3

A la medida del segmento $\overline{V'V}$ le llamamos

eje transverso,

y a la medida de $\overline{OV}$ u $\overline{OV'}$ le llamamos

semieje transverso.



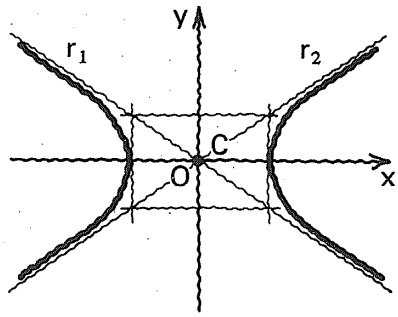
4

Ahora, observemos con atención la figura.

A las rectas r_1 y r_2 se les llama

asíntotas

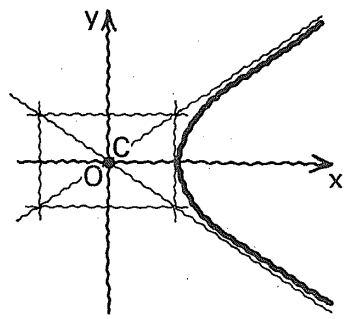
de la hipérbola.



5

Debemos tomar nota de este hecho:

A medida que se prolonga la hipérbola se aproxima más y más a la asíntota, pero sin llegar a "tocarla".

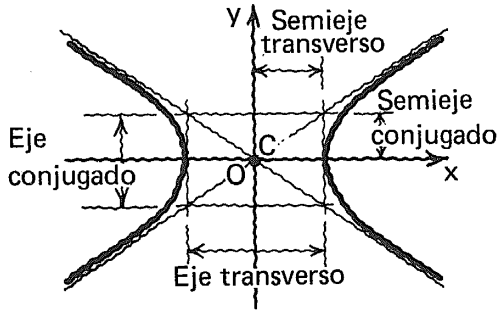


6

Consideramos,
en una hipérbola,
un

eje conjugado

como
puede verse
en la figura.



7

Al rectángulo
cuyos lados
son

el eje transverso

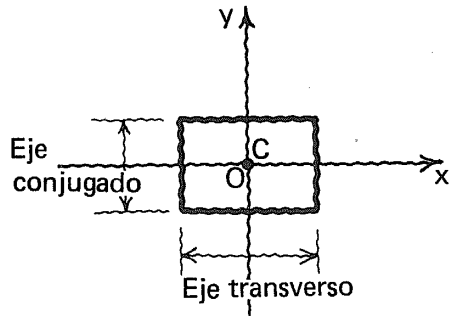
y

el eje conjugado

le llamaremos

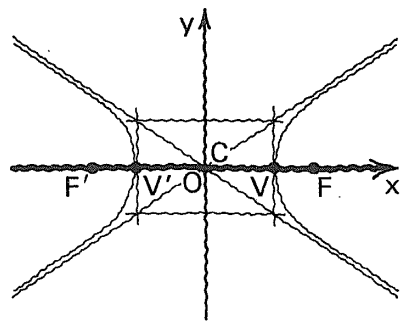
rectángulo auxiliar
o rectángulo de referencia

de la hipérbola.



8

A la recta
que
contiene
focos,
vértices
y
centro
le llamaremos,
como en el
caso de la elipse,

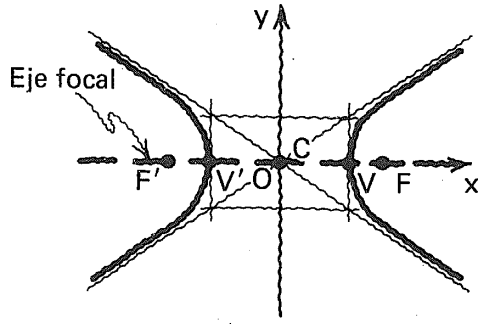


eje focal

9

Si el eje focal
es paralelo a
(o coincide con)
el eje de las x
diremos que
la **hipérbola** es

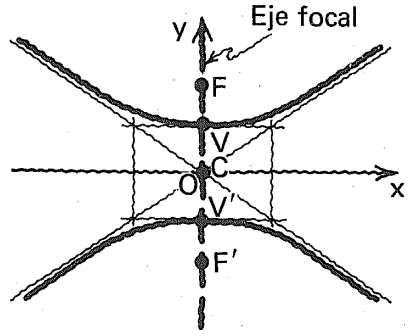
horizontal.



10

Si el eje focal
es paralelo a
(o coincide con)
el eje de las y
diremos que
la **hipérbola** es

vertical.

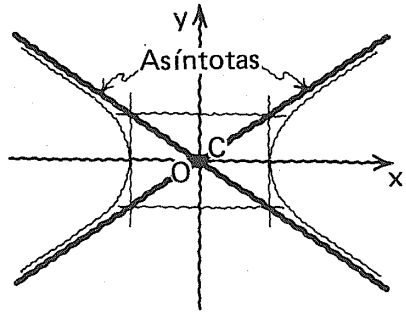


11

Podemos
observar que

las asíntotas

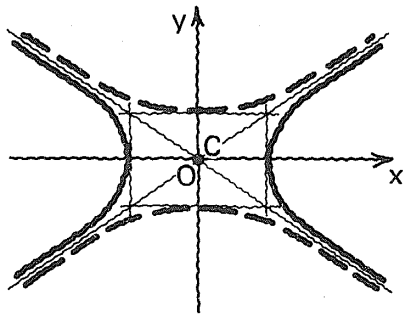
contienen a
las **diagonales**
del
rectángulo de
referencia.



12

A dos hipérbolas como las representadas, que tienen las mismas asíntotas (y el mismo rectángulo de referencia), les llamamos

hipérbolas conjugadas.



13

Denotaremos con

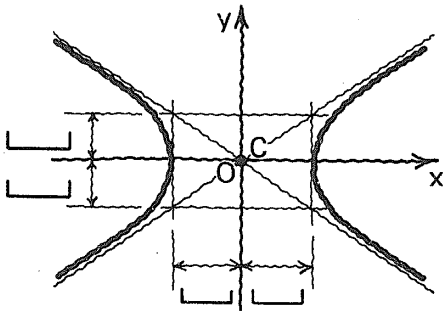
a

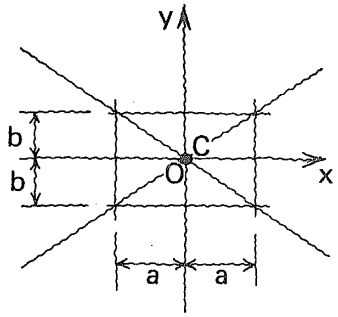
al semieje transverso, y con

b

al semieje conjugado.

Rotulemos de acuerdo con esto.

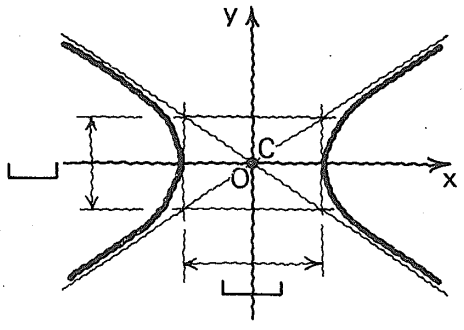




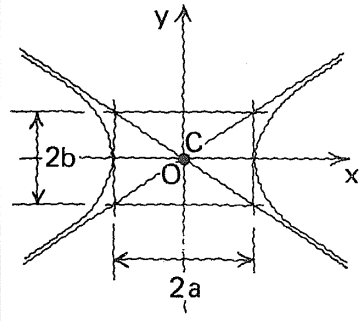
14

Entonces,
el **eje transverso**
quedará denotado
por [ ]

y
el **eje conjugado**
por [ ]



- 2a
- 2b



15

Para trazar
una hipérbola con centro en el origen,
dados
sus dos semiejes **a** y **b**
empezamos por
trazar el **rectángulo auxiliar.**

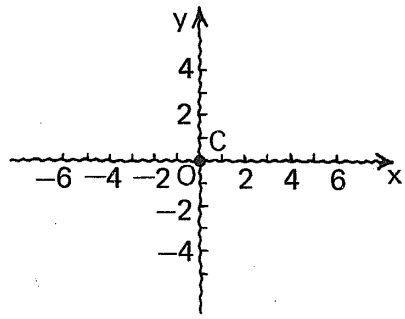
16

Vamos a trazar la gráfica
de una hipérbola horizontal
con centro en el origen,
para la cual

$a = 3$

y

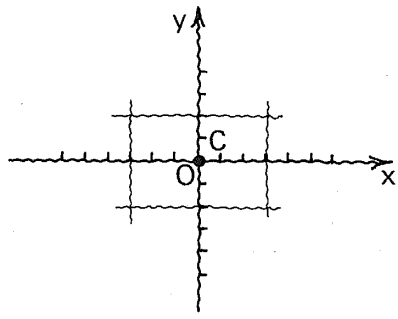
$b = 2$



1. Trazamos primero
el rectángulo auxiliar.

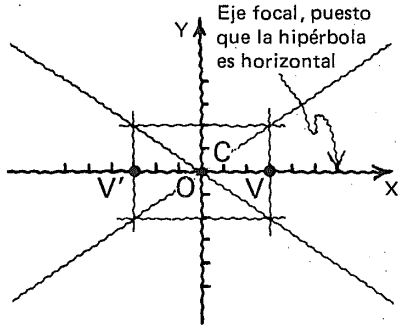
Respuesta
en el
cuadro siguiente.

2. Trazamos las
asíntotas.



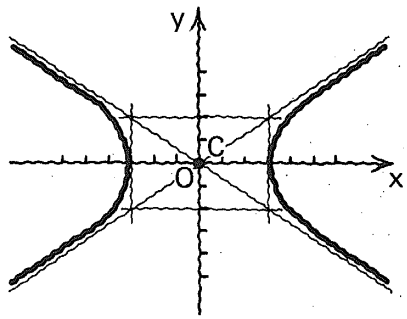
Respuesta
en el
cuadro siguiente.

3. Hacemos el trazo de cada rama de la hipérbola, tomando como vértices los puntos de intersección del eje focal con el rectángulo auxiliar, y acercándonos a las asíntotas, sin tocarlas.



Respuesta en el cuadro siguiente.

Esta es la representación gráfica de una hipérbola horizontal con semieje transverso igual a 3 y semieje conjugado igual a 2.



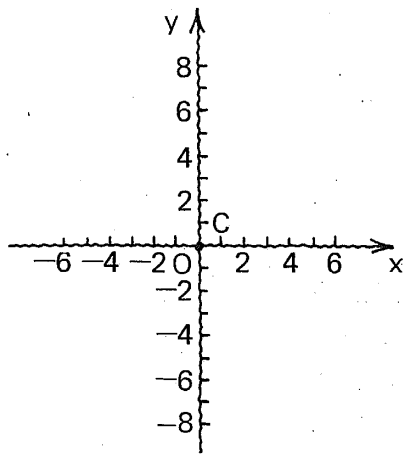
17

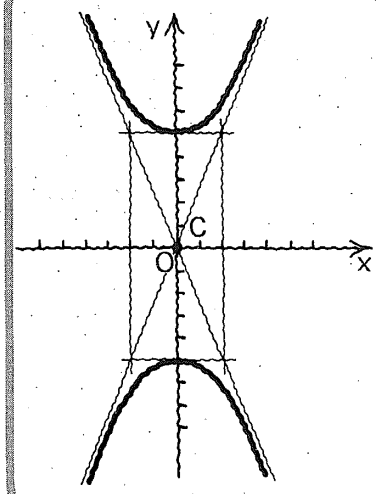
Trazar una hipérbola vertical con centro en el origen siendo:

a = 5

y

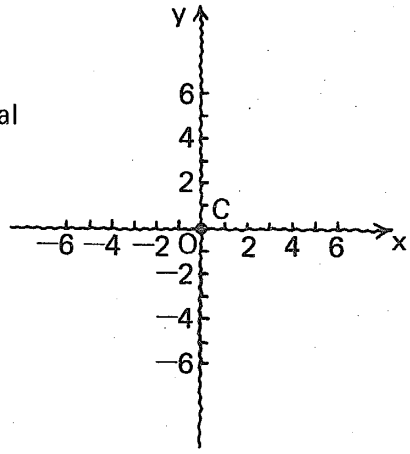
b = 2

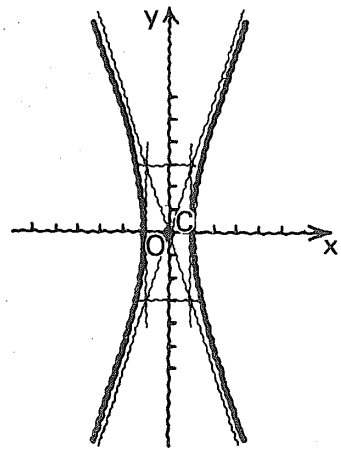




18

Trazar una hipérbola horizontal
con centro en el origen,
de manera que
su semieje transverso sea
igual a 1
y
su semieje conjugado sea
igual a 3.

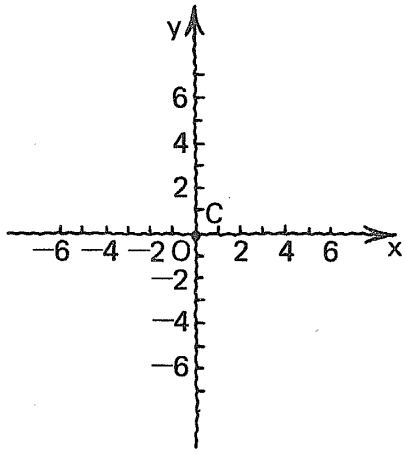


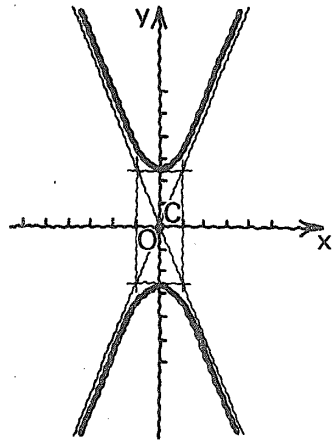


19

Trazar una hipérbola vertical
con centro en el origen,
para la cual:

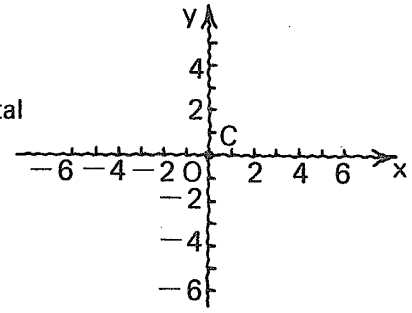
eje transverso = 5
eje conjugado = 2

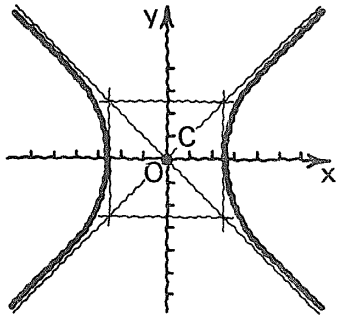




20

Trazar una hipérbola horizontal
con centro en el origen,
con sus dos semiejes
iguales a $\sqrt{5}$.





21

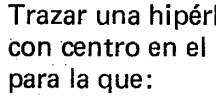
Una hipérbola
para la que

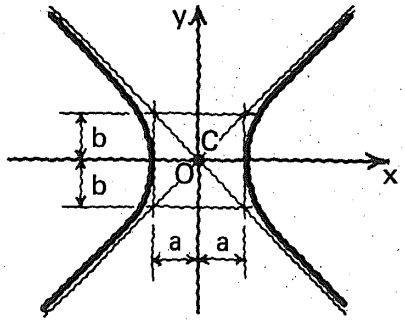
$a = b$

recibe el nombre de

hipérbola equilátera

En este caso,
el rectángulo auxiliar es un



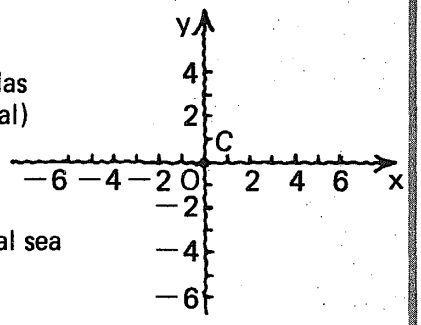


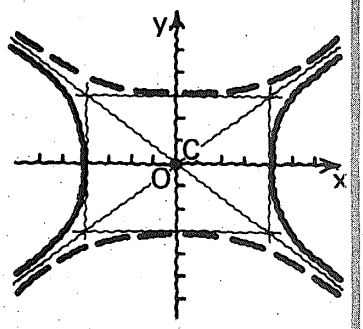
cuadrado

22

Trazar dos hipérbolas conjugadas
(una vertical y la otra horizontal)
con centro en el origen,
de manera que

el eje transverso de la horizontal sea
igual a 8, y
su eje conjugado sea igual a 6.





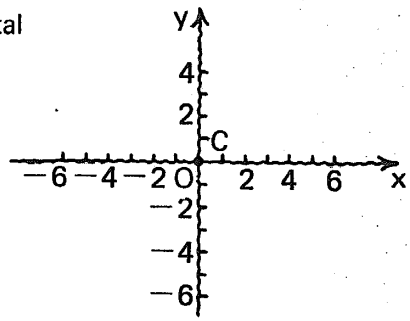
23

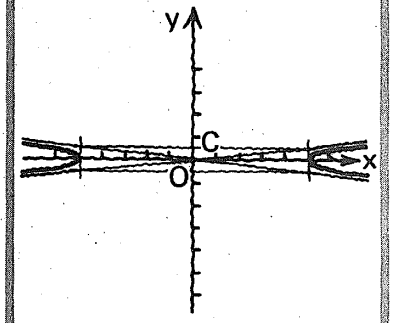
Trazar una hipérbola horizontal
con centro en el origen,
para la que:

$a = 5$,

y

$b = \frac{1}{2}$





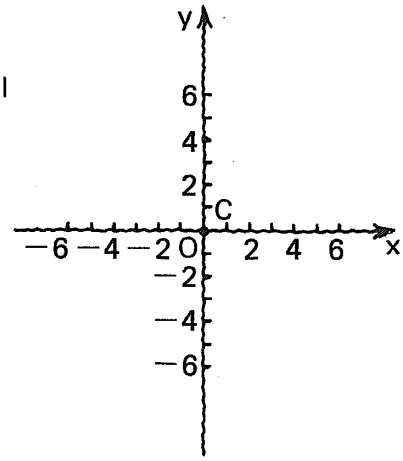
24

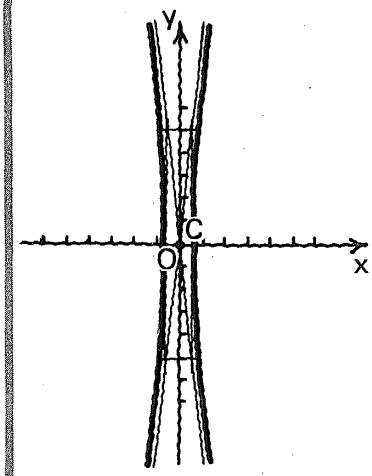
Trazar una hipérbola horizontal con centro en el origen, de tal manera que:

$a = \frac{1}{2}$

y

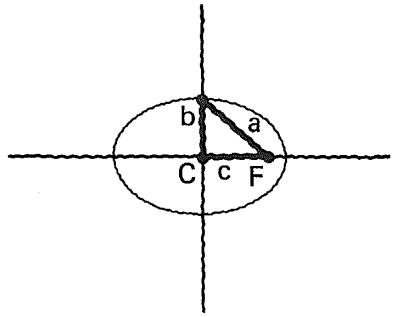
$b = 5$





25

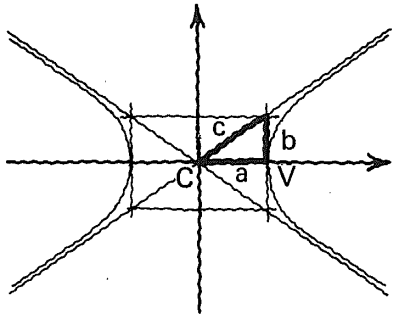
Hemos visto que, para una elipse, existe la siguiente relación pitagórica **entre las constantes a, b y c:**



$a^2 = b^2 + c^2$

26

De manera similar, para una hipérbola, se va a cumplir que:

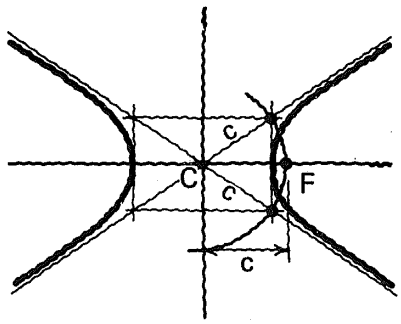


de acuerdo con la figura.

$c^2 = a^2 + b^2$

27

Observemos
con atención.



28

Para una hipérbola horizontal,
en la cual

$a = 4$

$b = 2$

Se requiere la semidistancia
focal

$c \doteq$ ⌊_____⌋

$c = \sqrt{4^2 + 2^2}$

$c = \sqrt{16 + 4}$

$c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

4.47

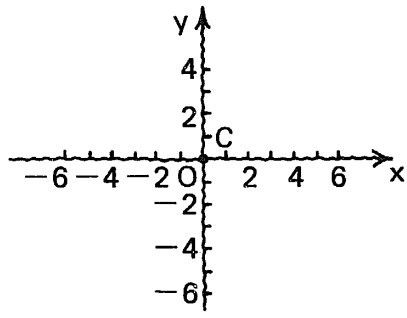
29

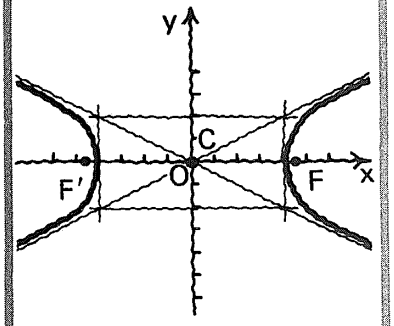
Trazar la gráfica cartesiana
de la hipérbola horizontal
con
centro en el origen
y

$a = 4$
$b = 2$

Trazar los focos,
sabiendo que:

$c = 2\sqrt{5} \doteq 4.47$





30

Para la hipérbola considerada.

Vértices:

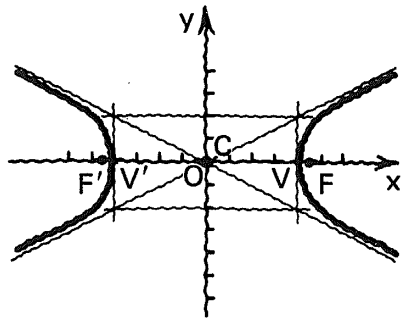
$V = \underline{\qquad}$

$V' = \underline{\qquad}$

Focos:

$F = \underline{\qquad}$

$F' = \underline{\qquad}$



(4,0)

(− 4,0)

$(2\sqrt{5}, 0)$

$(-2\sqrt{5}, 0)$

31

Dar los vértices y los focos de la hipérbola vertical con centro en el origen, semieje transverso igual a $\frac{7}{2}$ y semieje conjugado igual a $\frac{9}{4}$.

Trazar la gráfica cartesiana correspondiente.

Respuesta en el cuadro siguiente

$$c = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{477}}{4} \doteq 5.46$$

Vértices:

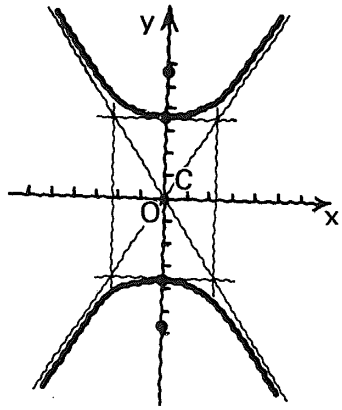
$$V = \left(0, \frac{7}{2}\right)$$

$$V' = \left(0, -\frac{7}{2}\right)$$

Focos:

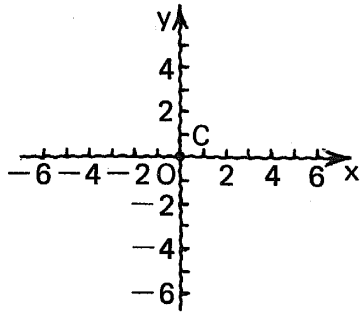
$$F = \left(0, \frac{\sqrt{477}}{4}\right)$$

$$F' = \left(0, -\frac{\sqrt{477}}{4}\right)$$



32

Para una hipérbola horizontal
con centro en el origen,
semieje transverso igual a 4
y
semidistancia focal igual a 5
dar los vértices, los focos
y
trazar la gráfica cartesiana.



Respuesta
en el
cuadro
siguiente

$c^2 = a^2 + b^2$ ∴

$b^2 = c^2 - a^2$

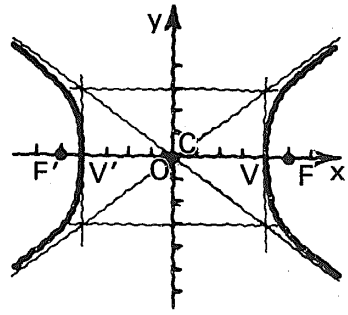
$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$

Vértices:

V = (4,0)
V′ = (− 4,0)

Focos:

F = (5,0)
F′ = (− 5,0)

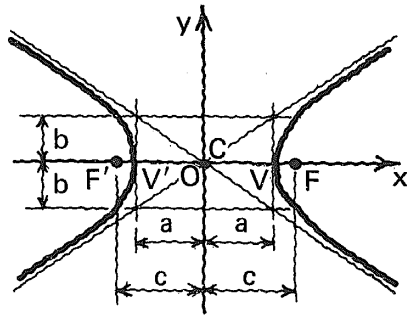


33

La **excentricidad**
de una hipérbola
seguirá siendo
definida, como
para la elipse,

$e = \frac{c}{a}$

pero
como c > a



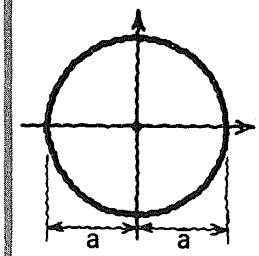
e deberá ser **mayor que / menor que** 1.

Señalar la opción correcta.

mayor que 1

34

Estudiemos con atención este resumen de las excentricidades definidas como: $e = \frac{c}{a}$

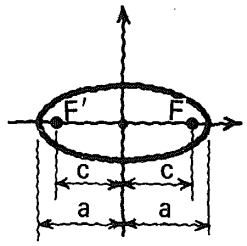


Para una **circunferencia**

$c = 0$

por lo tanto:

$e = \frac{c}{a} = 0$

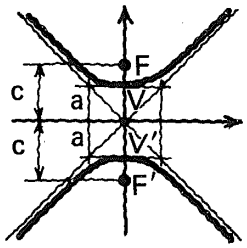


Para una **elipse**

$c < a$

por lo tanto:

$0 < e < 1$



Para una **hipérbola**

$c > a$

por lo tanto:

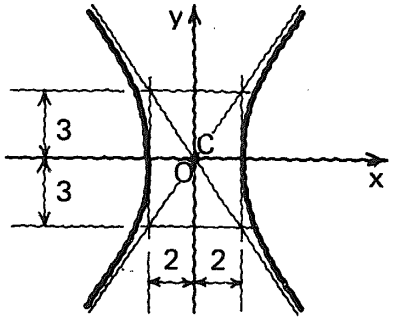
$e > 1$

35

La excentricidad de la hipérbola representada es:

$e = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

expresión general



$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{9 + 4}$

$c = \sqrt{13}$

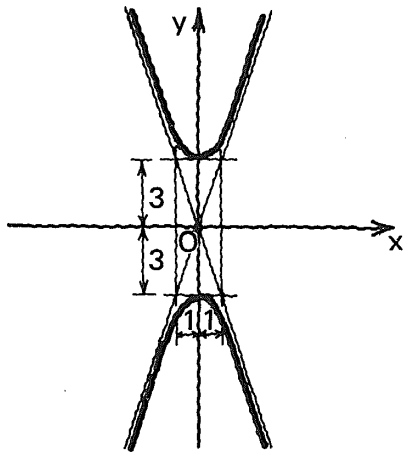
$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} \doteq 1.80$

36

La excentricidad de la hipérbola representada es:

$e = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

expresión general



$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{9 + 1}$

$c = \sqrt{10}$

$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3} \doteq 1.05$

6.5.1.1

Práctica adicional,
si se considera necesario

6.5.1

En este punto el alumno debe ser capaz de:

- *dar* una definición de hipérbola;
- *identificar* los siguientes elementos de una hipérbola:

  —eje y semieje transverso
  —eje y semieje conjugado
  —distancia y semidistancia focal
  —vértices, focos, centro, asíntotas

- *determinar* una de las tres constantes:

  —a, b ó c, dadas las otras dos
  a partir de la relación: $c^2 = a^2 + b^2$

- *dar* los vértices y los focos:

  —de una hipérbola con centro en el origen
  a partir de dos de las constantes: a, b ó c

- *dar* la excentricidad $e = \frac{c}{a}$ de una hipérbola.

5.2

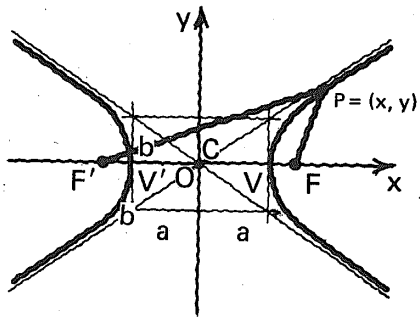
Ecuación ordinaria de una hipérbola (horizontal o vertical)

37

Sea una hipérbola horizontal,
y_
$P = (x, y)$
un punto cualquiera
perteneciente a ella.

De acuerdo con la definición:

$$\left| |\overrightarrow{F'P}| - |\overrightarrow{PF}| \right| = k$$

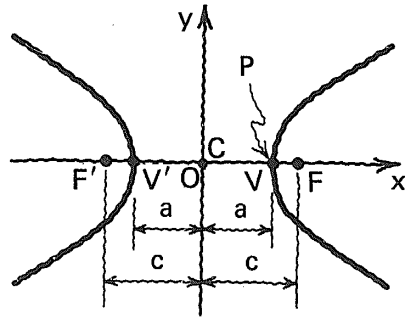


38

Atención:

si consideramos al punto P en una posición particular, (coincidiendo con el vértice V)

$$|\overrightarrow{F'P}| - |\overrightarrow{PF}| = \underline{\quad}$$



$|\overrightarrow{F'P}| = c + a$

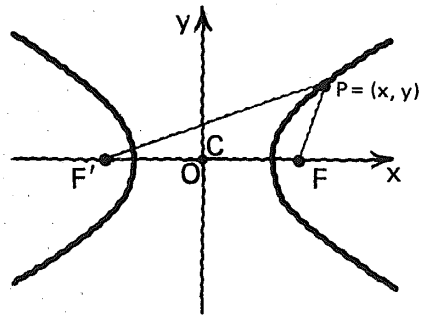
$|\overrightarrow{PF}| = c - a$

$|c + a - (c - a)| = |2a| = 2a$

39

Entonces, podemos escribir para un punto cualquiera P = (x,y)

$\left|\overrightarrow{|F'P|} - \overrightarrow{|PF|}\right| =$ [ ]

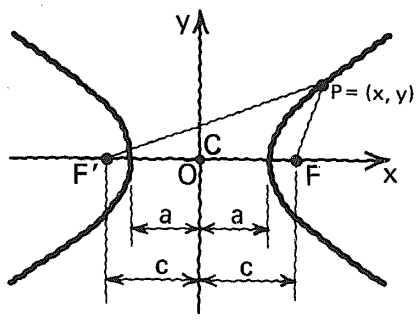


2a

40

$\left|\overrightarrow{|F'P|} - \overrightarrow{|PF|}\right| = 2a$

Vamos, ahora, a expresar $\overrightarrow{|F'P|}$ y $\overrightarrow{|PF|}$ en términos de las coordenadas de F', P y F.



F' = [ ]

P = [ ]

F = [ ]

(−c,0)

(x,y)

(c,0)

41

$\left|\overrightarrow{|F'P|} - \overrightarrow{|PF|}\right| = 2a$

F' = (−c,0)
P = (x,y)
F = (c,0)

$\overrightarrow{|F'P|} =$ [ ]

$\overrightarrow{|PF|} =$ [ ]

$\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$

$\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

42

$\left|\,|\overrightarrow{F'P}| - |\overrightarrow{PF}|\,\right| = 2a$

$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$

Si consideramos, en primer lugar, que: $|\overrightarrow{F'P}| > |\overrightarrow{PF}|$,

podemos escribir:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

sin los signos de valor absoluto.

43

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

Esta es
una ecuación de la hipérbola.
Vamos a expresarla
en una
forma más simple.

44

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

1. Aislar el primer radical en el lado izquierdo de la ecuación.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

45

$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

2. Elevar al cuadrado ambos miembros.

$(x + c)^2 + y^2$
$= [2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}]^2$

46

$(x + c)^2 + y^2 = [2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}]^2$

3. Desarrollar el binomio cuadrático del segundo miembro.

$(x + c)^2 + y^2$
$= 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$
$+ (x - c)^2 + y^2$

47

$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$

4. Aislar el término conteniendo radicales en el segundo miembro, y reducir términos semejantes en el primer miembro.

- $(x + c)^2 + y^2 - 4a^2$
$- (x - c)^2 - y^2$
$= 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

- $(x + c)^2 - 4a^2 - (x - c)^2$
$= 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

48

$(x + c)^2 - 4a^2 - (x - c)^2 = 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

5. Desarrollar binomios cuadráticos y reducir términos semejantes en el primer miembro.

- $x^2 + 2cx + c^2 - 4a^2 - (x^2 - 2cx + c^2) = 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$
- $x^2 + 2cx + c^2 - 4a^2 - x^2 + 2cx - c^2 = 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$
- $4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

49

$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

6. Dividir entre 4 y elevar al cuadrado ambos miembros.

- $cx - a^2 = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$
- $(cx - a^2)^2 = a^2[(x - c)^2 + y^2]$

50

$(cx - a^2)^2 = a^2[(x - c)^2 + y^2]$

7. Desarrollar los binomios cuadráticos en ambos miembros y efectuar el producto indicado en el segundo.

- $c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$
- $c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

51

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

8. Reducir términos semejantes, y agrupar en el primer miembro los términos en x e y, y en el segundo los términos constantes.

$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$

$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

52

$\boxed{c^2x^2 - a^2x^2} - a^2y^2 = \boxed{a^2c^2 - a^4}$

9. Factorizar los binomios señalados.

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

53

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

10. Sustituir $(c^2 - a^2)$ por su equivalente de acuerdo con la relación pitagórica estudiada.*

b^2

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Ver cuadro 25.

54

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

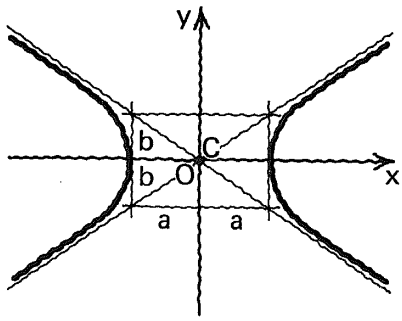
11. Dividir ambos miembros entre a^2b^2.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

55

Obtenemos esta **ecuación** simplificada de una

hipérbola horizontal con centro en el origen.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a, b \in \mathbb{R}^+$

56

Ahora bien,

podemos verificar que en la expresión

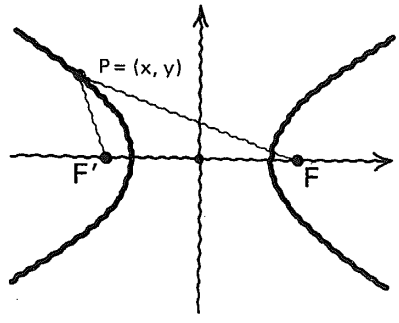
$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

si $|\overrightarrow{F'P}| < |\overrightarrow{PF}|$ resulta:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

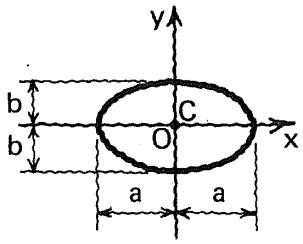
que conduce a la misma ecuación

que hemos obtenido para $|\overrightarrow{F'P}| > |\overrightarrow{PF}|$



57

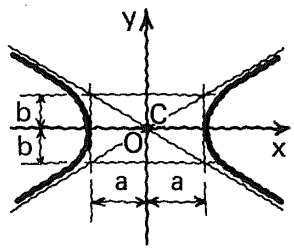
Comparemos



Elipse horizontal con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a > b$



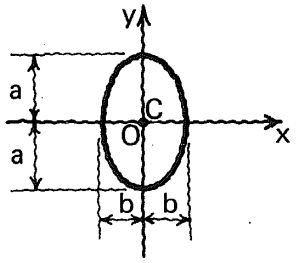
Hipérbola horizontal con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a mayor o menor o igual a **b**

58

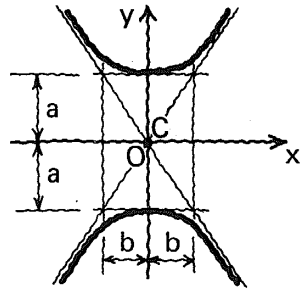
Sigamos comparando.



Elipse vertical con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$a > b$



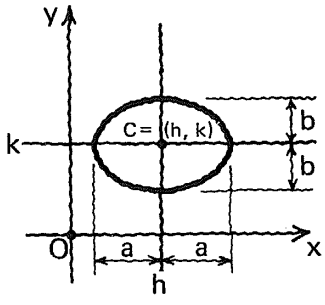
Hipérbola vertical con centro en el origen:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

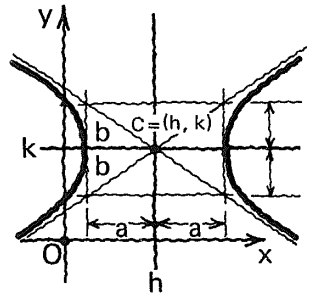
a mayor o menor o igual a **b**

59

Además.



Elipse horizontal con centro en un punto cualquiera C = (h, k)



Hipérbola horizontal con centro en un punto cualquiera C = (h, k)

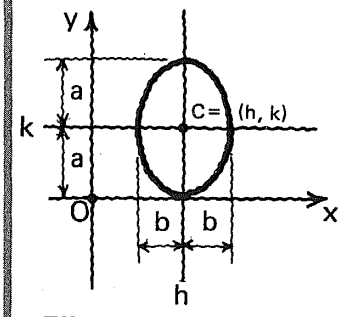
Podemos deducir la segunda ecuación, si lo consideramos necesario.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

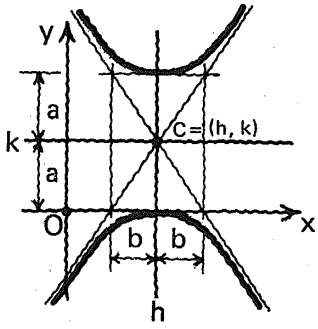
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

60

Finalmente:



Elipse vertical con centro en un punto cualquiera P = (h,k)



Hipérbola vertical con centro en un punto cualquiera P = (h,k)

Podemos deducir la segunda de las ecuaciones, si lo consideramos necesario.

- $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

- $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

61

Se requiere una ecuación de la hipérbola horizontal con centro en (2,4), semieje transverso igual a 3 y semieje conjugado igual a 2.

Ver cuadro siguiente.

62

Expresión general:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

63

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Datos:

C = ⌊ ⌋ { h = ⌊ ⌋ ; k = ⌊ ⌋

a = ⌊ ⌋

b = ⌊ ⌋

Ecuación requerida: ⌊ ⌋

- (2,4)
- 2
- 4
- 3
- 2
- $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

64

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

Semidistancia focal c = ⌊ ⌋

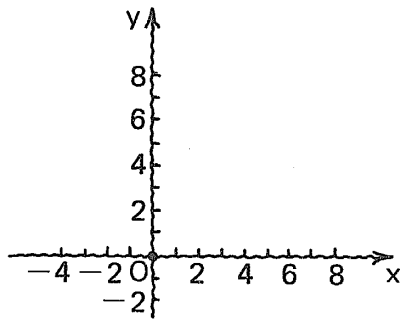
- $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $c = \sqrt{9 + 4}$
- $c = \sqrt{13}$
- $\sqrt{13} \doteq 3.61$

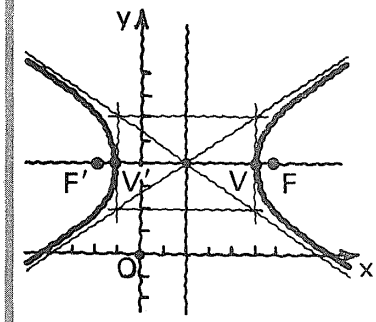
65

Trazar la gráfica de

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

indicando los vértices (V y V′) y los focos (F y F′).





66

Demos los siguientes elementos de la hipérbola

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

Semieje transverso ____ = ____
Semieje conjugado ____ = ____
Semidistancia focal ____ = ____

Eje transverso ____ = ____
Eje conjugado ____ = ____
Distancia focal ____ = ____

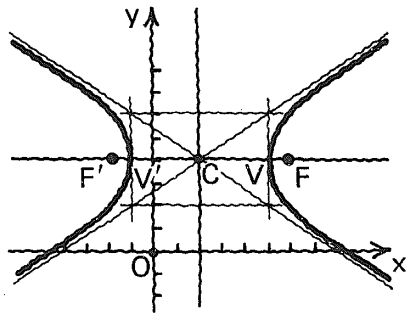
$a = 3$
$b = 2$
$c = \sqrt{13}$

$2a = 6$
$2b = 4$
$2c = 2\sqrt{13}$

67

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

Centro C = ____



Vértices:

V = ____
V' = ____

Focos:

F = ____
F' = ____

(2,4)

(5,4)
(−1,4)

$(2 + \sqrt{13},4)$
$(2 - \sqrt{13},4)$

68

La excentricidad de la hipérbola

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

es:

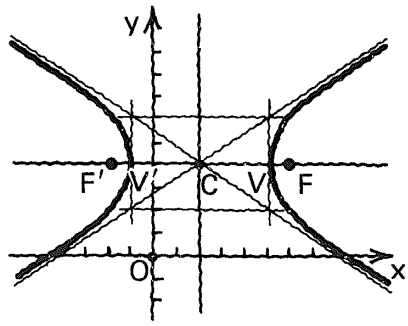
e = ____ = ____

expresión general

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} \doteq 1.20$$

69

Una ecuación del eje focal es:



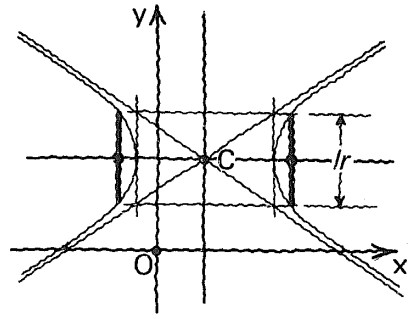
$y = 4$ ó $y - 4 = 0$

70

En una hipérbola seguiremos llamando

lado recto lr o ancho focal

a la medida de la cuerda que contiene a un foco y es perpendicular al eje focal.

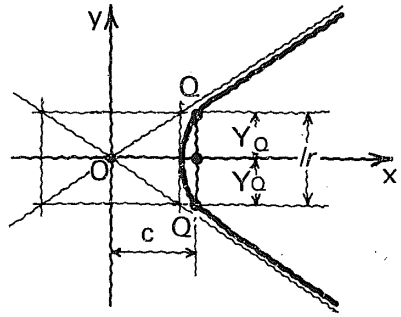


71

Para deducir una expresión para lr consideremos una hipérbola horizontal con centro en el origen.

$lr = 2|y_Q| = 2|y_{Q'}|$

$|y_Q| = |y_{Q'}| =$ ____



Una ecuación de tal hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de donde

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Para $x = c$:

$$y_Q = \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}$$

$$y_{Q'} = -\frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}$$

- $\frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}$

72

$lr = 2|y_Q| = 2|y_{Q'}|$

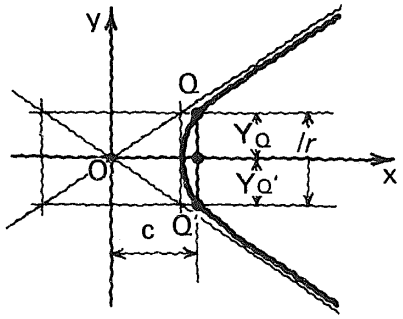
$|y_Q| = |y_{Q'}| = \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}$

como $\sqrt{c^2 - a^2} =$ [ ]

$|y_Q| = |y_{Q'}| =$ [ ]

y

$lr =$ [ ]



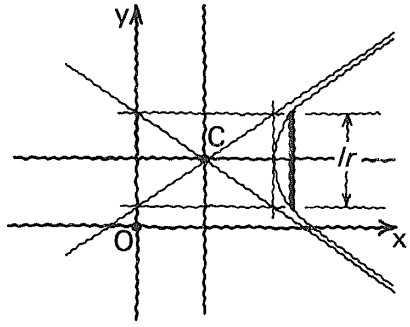
- b
- $\frac{b^2}{a}$
- $\frac{2b^2}{a}$

73

La expresión obtenida:

$$lr = \frac{2b^2}{a}$$

nos es familiar;
con ella hemos calculado
el lado recto o ancho focal
de una elipse.



74

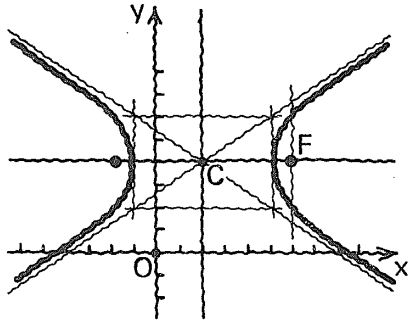
Para la hipérbola

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

que habíamos venido
considerando,

$lr =$ [ ] = [ ]

expresión
general



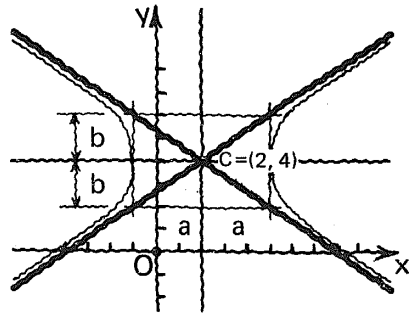
$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3} \doteq 2.666...$$

Verificar en la gráfica.

75

Necesitamos, ahora, una ecuación para cada una de las asíntotas de la hipérbola

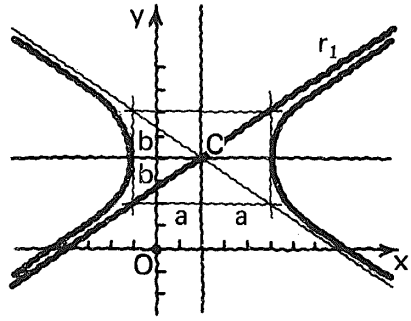
$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$



76

Podemos escribir una ecuación para la asíntota r_1, observando que pasa por $C = (2,4)$ y tiene una pendiente **m** igual [ ]

[ ]



$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$$

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x-2)$$

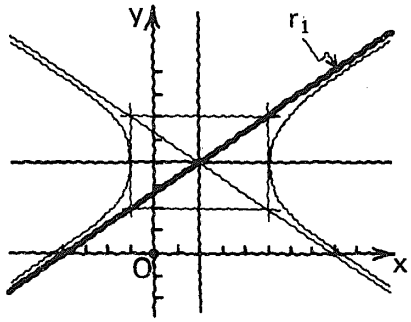
77

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x-2)$$

Ecuación de la forma

$y = mx + b$:

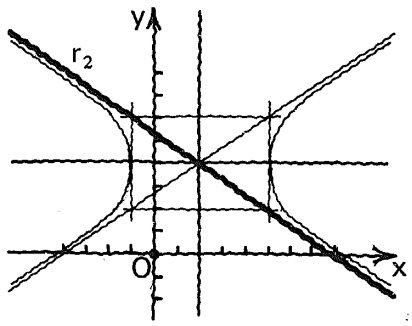
[ ]



$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

78

De manera similar podemos obtener una ecuación de la forma $y = mx + b$ para la asíntota r_2:



- $y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 2)$
- $y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}$

79

La ecuación

$$(y + 3)^2 - \frac{(x + 1)^2}{4} = 1$$

representa

una hipérbola **vertical / horizontal**

con centro en [ ]

Señalar la opción correcta y completar.

vertical

$(-1, -3)$

80

El semieje transverso de la hipérbola

$$(y + 3)^2 - \frac{(x + 1)^2}{4} = 1$$

es igual a [ ]

Su semieje conjugado es igual a [ ]

La ecuación puede escribirse así:

$$\frac{(y + 3)^2}{1} - \frac{(x + 1)^2}{4} = 1$$

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{4} = 2$

81

La semidistancia focal, denotada por [ ] de la hipérbola

$$\frac{(y+3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

es igual a [ ]

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{1 + 4}$

$\sqrt{5} \doteq 2.24$

82

$$\frac{(y+3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

Eje transverso 2a = [ ]
Eje conjugado 2b = [ ]
Distancia focal 2c = [ ]

2
4
$2\sqrt{5}$

83

$$\frac{(y+3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

Una ecuación del eje focal es:

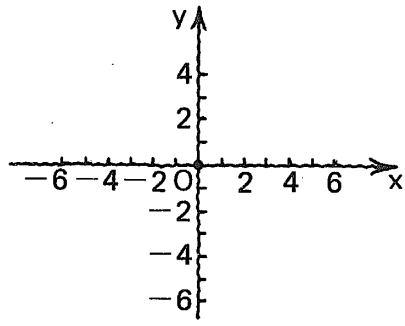
[ ]

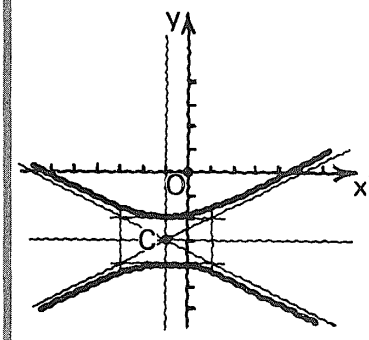
$x = -1$ ó $x + 1 = 0$

84

$$\frac{(y+3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

Hacer la gráfica cartesiana.

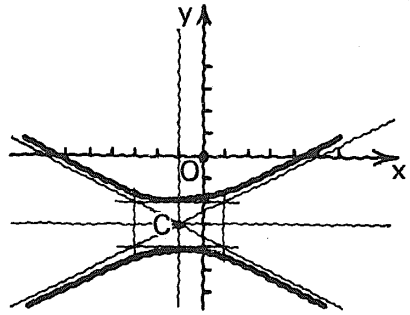


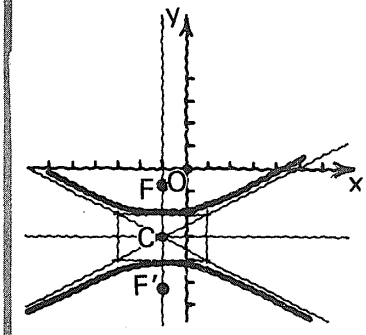


85

$$\frac{(y+3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

Trazar los focos.





86

$$\frac{(y+3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

Vértices:

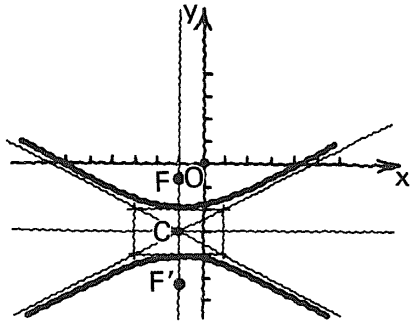
V = (−1, −2)

V′ = (−1, −4)

Focos:

F = $(-1, -3+\sqrt{5})$

F′ = $(-1, -3-\sqrt{5})$

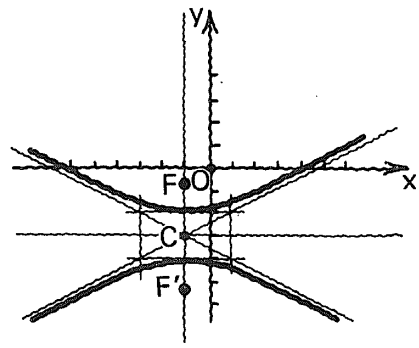


87

$$\frac{(y+3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

Lado recto:

$lr =$ [ ]



$$lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{1} = 8$$

8

Verificar en la gráfica.

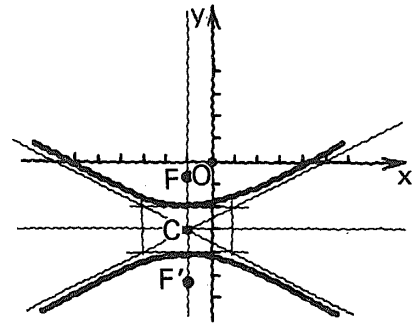
88

$$\frac{(y+3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

Ecuaciones de las asíntotas.

[ ]

[ ]



$$y + 3 = \frac{1}{2}(x+1)$$

ó $\quad y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

$$y + 3 = -\frac{1}{2}(x+1)$$

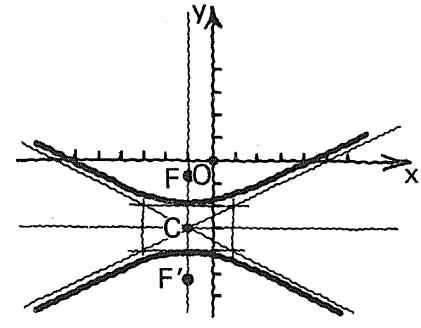
ó $\quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

89

$$\frac{(y+3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

Excentricidad:

$e =$ [ ]



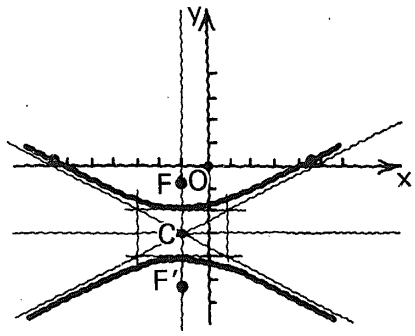
$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \doteq 2.24$$

90

Puntos de intersección de la hipérbola

$$\frac{(y+3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

Con el eje de las x:



$I_1 =$ ____

$I_2 =$ ____

Para y = 0

$$9 - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

$$x^2 + 2x - 31 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 124}}{2}$$

$$x \doteq -1 \pm 5.65$$

$$x_1 \doteq 4.65$$

$$x_2 = -6.65$$

(4.65,0)

(−6.65,0)

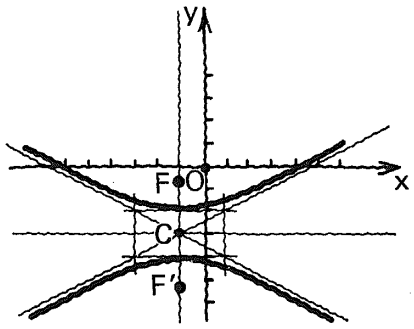
Verificar en la gráfica.

91

Puntos de intersección de la hipérbola

$$\frac{(y+3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

con el eje de las y:



$I_3 =$ ____

$I_4 =$ ____

Para x = 0:

$$(y+3)^2 - \frac{1}{4} = 1$$

$$4y^2 + 24y + 31 = 0$$

$$y = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 496}}{8}$$

$$y = -3 \pm 1.12$$

$$y_3 = -1.88$$

$$y_4 = -4.12$$

(0,−1.82)

(0,−4.18)

6.5.2.1

Práctica adicional, si se considera necesario.

6.5.2.2

Práctica adicional de
determinación de los siguientes elementos de una hipérbola
(horizontal o vertical) dada por una ecuación ordinaria;

- —Semieje y eje transverso
- —Semieje y eje conjugado
- —Semidistancia y distancia focal
- —Centro, vértices, focos
- —Ecuación del eje focal
- —Ecuaciones de las asíntotas
- —Lado recto, excentricidad
- —Intersecciones con los ejes coordenados
  si se considera necesario.

6.5.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* una ecuación de una hipérbola (vertical u horizontal) con centro en un punto cualquiera, en alguna de las formas:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ó } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

dada la información suficiente;

- *obtener* los siguientes elementos de una hipérbola (vertical u horizontal) con centro en un punto cualquiera, dada por una ecuación de alguna de las formas:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ó } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

- —Semieje y eje transverso
- —Semieje y eje conjugado
- —Semidistancia y distancia focal
- —Centro
- —Vértices
- —Focos
- —Ecuación del eje focal
- —Ecuaciones de las asíntotas
- —Lado recto
- —Excentricidad
- —Intersecciones con los ejes coordenados

5.3

Ecuación general de una hipérbola con ejes paralelos a los coordenados.

92

Transformaremos la ecuación

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

en una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

usando un procedimiento semejante al estudiado para la elipse.

93

Estado inicial. $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

1. Multiplicar ambos miembros por el producto de los denominadores.

$9 \times 4 = 36$

Estado intermedio 1: $4(x-2)^2 - 9(y-4)^2 = 36$

94

Estado intermedio 1. $4(x - 2)^2 - 9(y - 4)^2 = 36$

2. Desarrollar los binomios cuadráticos del primer miembro.

Estado intermedio 2: _____

$4(x^2 - 4x + 4)$
$- 9(y^2 - 8y + 16) = 36$

95

Estado intermedio 2. $4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 8y + 16) = 36$

3. Efectuar los productos indicados en el primer miembro.

Estado intermedio 3: _____

$4x^2 - 16x + 16$
$- 9y^2 + 72y - 144 = 36$

96

Estado intermedio 3. $4x^2 - 16x + 16 - 9y^2 + 72y - 144 = 36$

4. Sumar a ambos miembros el inverso aditivo del segundo miembro, reducir términos semejantes y ordenar de acuerdo con el modelo.

Estado final: _____

$4x^2 - 9y^2 - 16x$
$+ 72y - 164 = 0$

97

Estudiar con atención.

Estado inicial. $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y-4)^2}{4} = 1$

Estado intermedio 1. $4(x-2)^2 - 9(y-4)^2 = 36$

Estado intermedio 2. $4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 8y + 16) = 36$

Estado intermedio 3. $4x^2 - 16x + 16 - 9y^2 + 72y - 144 = 36$

Estado final. $4x^2 - 9y^2 - 16x + 72y - 164 = 0$

Modelo del estado final. $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

98

Se requiere transformar la ecuación

$$\frac{(y+3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

en una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

99

Estado inicial. $\dfrac{(y+3)^2}{1} - \dfrac{(x+1)^2}{4} = 1$

Estado intermedio 1: _____

$4(y+3)^2 - (x+1)^2 = 4$

100

Estado intermedio 1. $4(y + 3)^2 - (x + 1)^2 = 4$

Estado intermedio 2: _____

$4(y^2 + 6y + 9) - (x^2 + 2x + 1) = 4$

101

Estado intermedio 2. $4(y^2 + 6y + 9) - (x^2 + 2x + 1) = 4$

Estado intermedio 3: _____

$4y^2 + 24y + 36 - x^2 - 2x - 1 = 4$

102

Estado intermedio 3. $4y^2 + 24y + 36 - x^2 - 2x - 1 = 4$

Estado final: _____

Modelo del estado final. $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$-x^2 + 4y^2 - 2x + 24y + 31 = 0$

o mejor

$x^2 - 4y^2 + 2x - 24y - 31 = 0$

6.5.3.1

Práctica adicional
de
transformación de una ecuación
de una hipérbola, de alguna de las formas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ó } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

en
una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

103

Ahora,
intentemos transformar la ecuación

$$4x^2 - 3y^2 + 8x + 24y + 40 = 0$$

en una ecuación de
alguna de las formas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ó } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

104

Estado inicial. $4x^2 - 3y^2 + 8x + 24y + 40 = 0$

1. Agrupar los términos en x, los términos en y y "pasar" el término independiente al segundo miembro.

Estado intermedio 1: $4x^2 + 8x - 3y^2 + 24y = -40$

105

Estado intermedio 1. $\overline{4x^2 + 8x} - \overline{3y^2 + 24y} = -40$

2. Expresar el binomio en **x** como el producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de x^2 y el binomio en **y** como el producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de y^2.

↓

Estado intermedio 2: ______________________

$4(x^2 + 2x) - 3(y^2 - 8y) = -40$

106

Estado intermedio 2. $4(x^2 + 2x) - 3(y^2 - 8y) = -40$

3. Completar trinomios cuadrados perfectos en **x** e **y**.

↓

Estado intermedio 3: ______________________

$4(x^2 + 2x + 1) - 3(y^2 - 8y + 16) = -84$

107

Estado intermedio 3. $4(x^2 + 2x + 1) - 3(y^2 - 8y + 16) = -84$

4. Factorizar los trinomios cuadrados perfectos en **x** e **y**.

↓

Estado intermedio 4: ______________________

$4(x + 1)^2 - 3(y - 4)^2 = -84$

108

Estado intermedio 4. $4(x + 1)^2 - 3(y - 4)^2 = -84$

5. Dividir ambos miembros entre (−84).

Estado final: ⌊ ⌋

$$-\frac{(x+1)^2}{21} + \frac{(y-4)^2}{28} = 1$$

o mejor:

$$\frac{(y-4)^2}{28} - \frac{(x+1)^2}{21} = 1$$

109

Estudiar con atención.

Estado inicial. $4x^2 - 3y^2 + 8x + 24y + 40 = 0$

Estado intermedio 1. $4x^2 + 8x - 3y^2 + 24y = -40$

Estado intermedio 2. $4(x^2 + 2x) - 3(y^2 - 8y) = -40$

Estado intermedio 3. $4(x^2 + 2x + 1) - 3(y^2 - 8y + 16) = -84$

Estado intermedio 4. $4(x + 1)^2 - 3(y - 4)^2 = -84$

Estado final. $\dfrac{(y-4)^2}{28} - \dfrac{(x+1)^2}{21} = 1$

Modelo del estado final. $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

110

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Al ser transformada una ecuación general en una ecuación de alguna de las formas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ó } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

estamos en condiciones de determinar todos los elementos de la hipérbola.

111

Por ejemplo, al ser transformada la ecuación

$$4x^2 - 3y^2 + 8x + 24y + 40 = 0$$

en

$$\frac{(y-4)^2}{28} - \frac{(x+1)^2}{21} = 1$$

sabemos que representa una hipérbola **vertical/horizontal.**

vertical

112

$$4x^2 - 3y^2 + 8x + 24y + 40 = 0$$

$$\frac{(y-4)^2}{28} - \frac{(x+1)^2}{21} = 1$$

El centro es C = [ ]

El semieje transverso es a = [ ]

El semieje conjugado es b = [ ]

(−1,4)

$\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\sqrt{21}$

113

$$4x^2 - 3y^2 + 8x + 24y + 40 = 0$$

$$\frac{(y-4)^2}{28} - \frac{(x+1)^2}{21} = 1$$

La semidistancia focal es c = [ ]

La excentricidad es e = [ ]

7

$$\frac{7}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \doteq 1.32$$

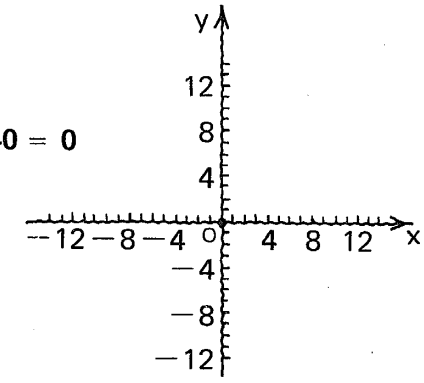
114

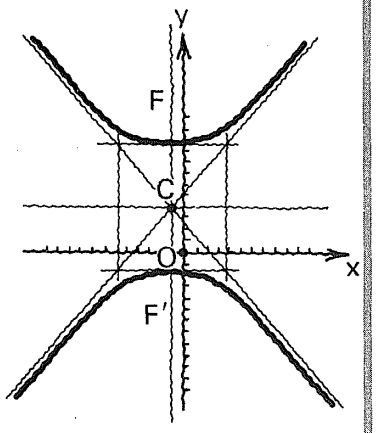
Trazar la gráfica cartesiana de

$4x^2 - 3y^2 + 8x + 24y + 40 = 0$

ó

$$\frac{(y-4)^2}{28} - \frac{(x+1)^2}{21} = 1$$





115

Vértices:

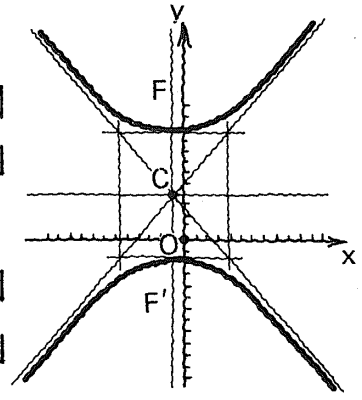
V = [ ]

V′ = [ ]

Focos:

F = [ ]

F′ = [ ]



$(-1,\ 4+2\sqrt{7})$

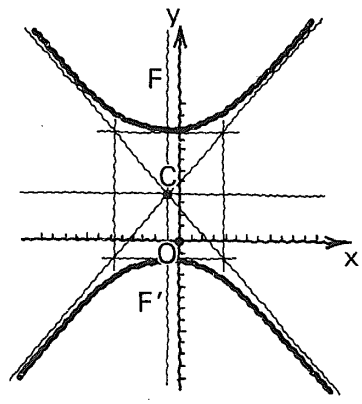
$(-1,\ 4-2\sqrt{7})$

$(-1, 11)$

$(-1, -3)$

116

Ecuaciones de las asíntotas:



$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4$$

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4$$

6.5.3.2

Práctica adicional de
transformación de
una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en una ecuación de alguna de las formas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ó } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

y obtención de los elementos
de la hipérbola representada, si se considera necesario.

117

Sea la ecuación

$$16x^2 - 25y^2 - 64x - 150y - 161 = 0$$

que vamos a intentar
poner en alguna de las formas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ó } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

118

Estado inicial. $16x^2 - 25y^2 - 64x - 150y - 161 = 0$

Estado intermedio 1: ⌊_____⌋

Estado intermedio 2: ⌊_____⌋

Estado intermedio 3: ⌊_____⌋

Estado intermedio 4: ⌊_____⌋

Estado final: ⌊_____⌋

$16x^2 - 64x - 25y^2 - 150y = 161$

$16(x^2 - 4x) - 25(y^2 + 6y) = 161$

$16(x^2 - 4x + 4) - 25(y^2 + 6y + 9) = 0$

$16(x - 2)^2 - 25(y + 3)^2 = 0$

$\frac{(x - 2)^2}{25} - \frac{(y + 3)^2}{16} = 0$

119

$$16x^2 - 25y^2 - 64x - 150y - 161 = 0$$

$$\frac{(x - 2)^2}{25} - \frac{(y + 3)^2}{16} = 0$$

Vemos que
la ecuación dada
no puede ser llevada a alguna de las formas

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \text{ ó } \frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

120

$$\frac{(x - 2)^2}{25} - \frac{(y + 3)^2}{16} = 0$$

Siendo el primer miembro de esta ecuación un binomio de la forma $a^2 - b^2$ podemos factorizarlo así:

⌊_____⌋

$\left(\frac{x - 2}{5} + \frac{y + 3}{4}\right)$

$\left(\frac{x - 2}{5} - \frac{y + 3}{4}\right) = 0$

121

$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{16} = 0$$

$$\left(\frac{x-2}{5} + \frac{y+3}{4}\right)\left(\frac{x-2}{5} - \frac{y+3}{4}\right) = 0$$

Sabemos que esta última ecuación es equivalente al sistema disyuntivo:

[ ] ∨ [ ]

- $\frac{x-2}{5} + \frac{y+3}{4} = 0$
- $\frac{x-2}{5} - \frac{y+3}{4} = 0$

122

$\frac{x-2}{5} + \frac{y+3}{4} = 0$ $\qquad$ $\frac{x-2}{5} - \frac{y+3}{4} = 0$

Cada una de estas ecuaciones de primer grado con dos variables, representa en el plano cartesiano:

[ ]

y puede ser escrita en la forma $y = mx + b$:

[ ] [ ]

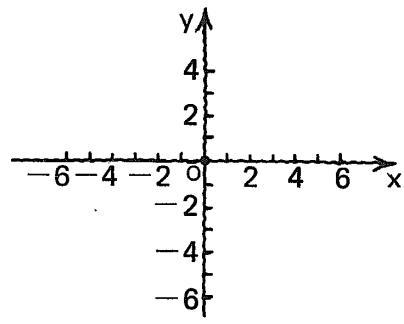
- una recta
- $y = -\frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$
- $y = \frac{4}{5}x - \frac{23}{5}$

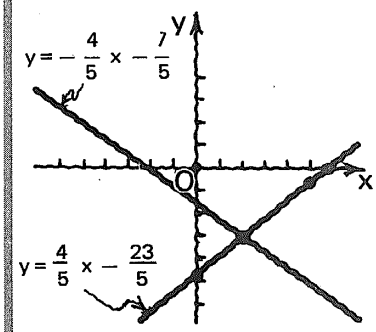
123

Representemos el sistema

$y = \frac{4}{5}x - \frac{23}{5} \vee y = -\frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$

en el plano cartesiano.





124

Observar con atención

la ecuación

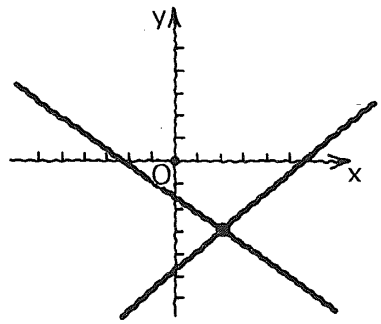
$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{16} = 0$$

ó

el sistema disyuntivo equivalente

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{23}{5} \vee y = -\frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$$

representa un par de rectas concurrentes en el punto $(2,-3)$.



125

La ecuación general

$$16x^2 - 25y^2 - 64x - 150y - 161 = 0$$

la ecuación ordinaria

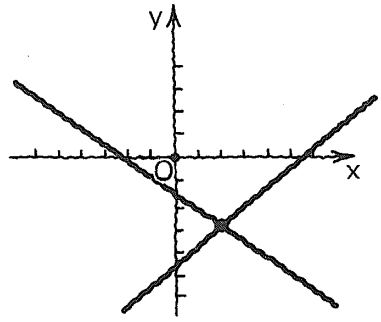
$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{16} = 0$$

o el sistema disyuntivo equivalente

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{23}{5} \vee y = -\frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$$

representan lo que llamaremos: una

hipérbola degenerada.



126

Si observamos con atención, vemos que las rectas

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{23}{5}$$

y

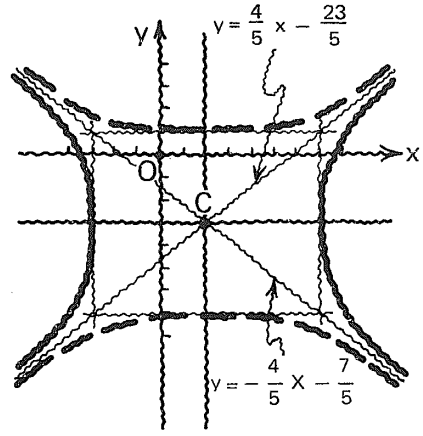
$$y = -\frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$$

son las **asíntotas** de alguna de las hipérbolas

$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

ó

$$\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{25} = 1$$



127

Podemos partir de
este hecho
para
determinar las **asíntotas**
de una
hipérbola dada
por alguna de sus
ecuaciones.

128

Por ejemplo,
obtener las ecuaciones
de las asíntotas de la hipérbola
dada por la ecuación general

$x^2 - 4y^2 - 24y - 40 = 0.$

Ver cuadro siguiente.

129

1. Transformamos la ecuación dada en una ecuación de alguna de las formas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Ver cuadro siguiente.

130

Estado inicial. $x^2 - 4y^2 - 24y - 40 = 0$

Estado intermedio 1: ⌊ ⌋

Estado intermedio 2: ⌊ ⌋

Estado intermedio 3: ⌊ ⌋

Estado intermedio 4: ⌊ ⌋

Estado final: ⌊ ⌋

$x^2 - 4y^2 - 24y = 40$

$x^2 - 4(y^2 - 6y) = 40$

$x^2 - 4(y^2 - 6y + 9) = 4$

$x^2 - 4(y - 3)^2 = 4$

$\frac{x^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{1} = 1$

131

$x^2 - 4y^2 - 24y - 40 = 0$

$\frac{x^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{1} = 1$

2. Sustituimos el 1 del segundo miembro por 0, factorizamos el primer miembro y escribimos el sistema disyuntivo equivalente:

⌊ ⌋

⌊ ⌋

⌊ ⌋

$\frac{x^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{1} = 0$

$\left(\frac{x}{2} + y - 3\right)\left(\frac{x}{2} - y + 3\right) = 0$

$\frac{x}{2} + y - 3 = 0 \vee \frac{x}{2} - y + 3 = 0$

132

$\underline{\frac{x}{2} + y - 3 = 0} \vee \underline{\frac{x}{2} - y + 3 = 0}$

3. Estas son ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola dada, y las podemos escribir en la forma $y = mx + b$:

⌊ ⌋

⌊ ⌋

o en la forma general $Ax + By + C = 0$, con $A, B, C \in Z$ y $A > 0$:

⌊ ⌋

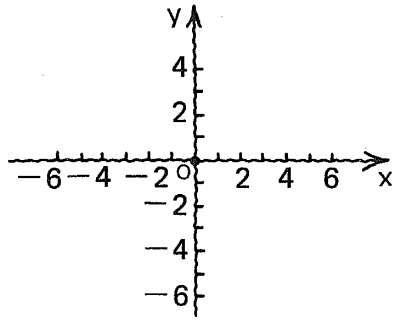
⌊ ⌋

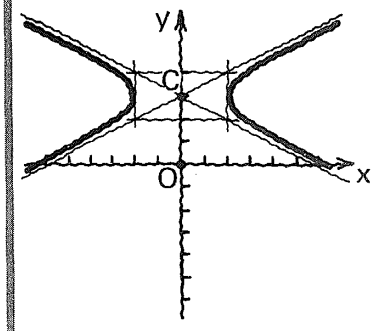
- $y = -\frac{1}{2}x + 3$
- $y = \frac{1}{2}x + 3$

- $x + 2y - 6 = 0$
- $x - 2y + 6 = 0$

133

4. Trazamos la gráfica cartesiana.





6.5.3.3

Práctica de determinación de las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola dada por una ecuación general u ordinaria, por el "método de la hipérbola degenerada", si se considera necesario.

134

Atención.
Entonces,
una ecuación general de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con $A, C, D, E, F \in \mathbb{R}$
y $AC < 0$ (A y C de signo contrario)

puede representar:

- una hipérbola con ejes paralelos a los cartesianos
  o
- un par de rectas concurrentes.

135

Recordemos que una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con $A, C, D, E, F \in \mathbb{R}$

y $A \neq C$, $AC > 0$ (A y C diferentes y del mismo signo)

puede representar

-
-
-

- una elipse (no circunferencia) con ejes paralelos a los coordenados
- un punto
- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano

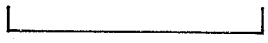
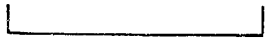
136

Asimismo, la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si $A, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ y $A = C$

representa

- 
- 
-

- una circunferencia
- un punto
- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano

6.5.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *transformar* una ecuación de una hipérbola dada en alguna de las formas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ó } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

en una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

- *transformar* una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en una ecuación de alguna de las formas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ó } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

- *obtener* los siguientes elementos de una hipérbola con ejes paralelos a los coordenados y dada por una de sus ecuaciones:

  — semieje y eje transverso
  — semieje y eje conjugado
  — semidistancia y distancia focal
  — centro
  — vértice
  — focos
  — una ecuación del eje focal
  — excentricidad
  — lado recto
  — ecuaciones de las asíntotas
  — intersecciones con los ejes coordenados

Esta obra se terminó de imprimir
el día 15 de agosto de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO EV KC 100

Bloque 6:

Geometría analítica

En los ocho *módulos de color morado* que forman el bloque 6, *Geometría analítica*, se amplían y formalizan los conceptos de relación, función y gráfica cartesiana. En el *módulo 1* se incluyen algunos conceptos y procedimientos elementales, tales como:

- Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano
- División de un segmento rectilíneo según una razón dada
- Ángulo formado por dos rectas concurrentes
- Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

Después, se conduce *paso a paso* al lector hacia la revisión de los lugares geométricos más comunes. Así, en el *módulo 2* se analiza la recta; en el *módulo 3*, la circunferencia; en el *módulo 4*, la elipse; en el *módulo 5*, la hipérbola, y en el *módulo 6*, la parábola.

Luego, con el estudio de las cónicas y la ecuación general de segundo grado, el cual se realiza en el *módulo 7*, se accede a la integración de un gran marco conceptual.

Dicho marco conceptual se amplía aún más en el *módulo 8*, donde se brindan los elementos necesarios para llevar a cabo el análisis de cualquier lugar geométrico del plano cartesiano.

Por último, las fórmulas y los conceptos fundamentales de todos los temas comprendidos en los módulos que integran este bloque, aparecen en el módulo de resumen llamado *Memo 6. Geometría analítica.*

Bloque	Módulo	Módulo de resumen
1 **ÁLGEBRA** ESTRUCTURAS Y OPERACIONES **Libros color café**	*1- Conjuntos* *2- Estructuras matemáticas* *3- El conjunto de los enteros* *4- Operaciones con enteros* *5- Lenguaje algebraico 1. Formación* *6- Lenguaje algebraico 2. Transformación* *7- Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división* *8- Operaciones con polinomios 2. Productos notables* *9- Operaciones con polinomios 3. Factorización* *10- El conjunto de los racionales* *11- Operaciones con expresiones racionales* *12- El conjunto de los reales* *13- Operaciones con expresiones reales* *14- El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones*	***MEMO 1*** *ÁLGEBRA. ESTRUCTURAS Y OPERACIONES*
2 **ÁLGEBRA** MODELOS **Libros color verde**	*1- La ecuación como modelo matemático* *2- Ecuaciones de primer grado* *3- Sistemas de ecuaciones de primer grado* *4- Desigualdades de primer grado* *5- Ecuaciones de segundo grado* *6- Desigualdades de segundo grado* *7- La relación como modelo matemático* *8- Funciones* *9- Funciones exponenciales* *10- Funciones logarítmicas* *11- Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas* *12- Resolución de problemas*	***MEMO 2*** *ÁLGEBRA. MODELOS*
NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA **3** **Libros color azul**	*1- Lógica proposicional 1. Proposiciones* *2- Lógica proposicional 2. Argumentos*	***MEMO 3*** *NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA*
4 **GEOMETRÍA EUCLIDIANA** **Libros color rojo**	*1- Conjuntos de puntos* *2- Relaciones binarias* *3- Figuras planas* *4- El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos.* *5- Polígonos convexos* *6- Relación de semejanza* *7- Geometría métrica en el plano* *8- Cuerpos geométricos*	***MEMO 4*** *GEOMETRÍA EUCLIDIANA*
5 **TRIGONOMETRÍA** **Libros color ocre**	*1- Las razones trigonométricas de un ángulo agudo* *2- Resolución de triángulos rectángulos* *3- El círculo trigonométrico* *4- Las funciones trigonométricas* *5- Las funciones trigonométricas inversas* *6- Identidades trigonométricas* *7- Resolución de triángulos cualesquiera* *8- Ecuaciones trigonométricas*	***MEMO 5*** *TRIGONOMETRÍA*
6 **GEOMETRÍA ANALÍTICA** **Libros color morado**	*1- Introducción a la geometría analítica* *2- La recta* *3- La circunferencia* *4- La elipse* ***5- La hipérbola*** *6- La parábola* *7- Las cónicas y la ecuación general de segundo grado* *8- Relaciones y lugares geométricos*	***MEMO 6*** *GEOMETRÍA ANALÍTICA*
7 **CÁLCULO DIFERENCIAL** **Libros color azul turquesa**	*1- Introducción al cálculo diferencial* *2- Límite de una función* *3- Continuidad de una función* *4- Derivación de funciones algebraicas* *5- Derivación de funciones trascendentes* *6- Extremos de una función (máximos y mínimos)*	***MEMO 7*** *CÁLCULO DIFERENCIAL*
8 **CÁLCULO INTEGRAL** **Libros color negro**	*1- Sumatoria y notación sigma* *2- La integral definida y la integral indefinida* *3- Integrales elementales* *4- Métodos de integración 1* *5- Métodos de integración 2* *6- Algunas aplicaciones del cálculo integral*	***MEMO 8*** *CÁLCULO INTEGRAL*

ISBN 968-24-0836-9